Une histoire des séries infinies (I)
D'Oresme à Euler

Marc-Antoine Coppo
Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.A. Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2
Marc-Antoine.Coppo@unice.fr

2010

Résumé

This article presents an historical survey on the development of the concept and applications of infinite series from the medieval period to the age of enlightenment, emphasizing on the evolution of ideas.

Mathematical Subject Classification (2000) : 40-03, 01A35, 01A45, 01A50.

1 Introduction

Le texte qui suit retrace, dans ses grandes lignes directrices, l'histoire des séries infinies depuis la période médiévale jusqu'au 18ème siècle en insistant particulièrement sur l'évolution des idées.

On commence par l'évocation de la brillante et novatrice contribution d'Oresme datant du milieu du 14ème siècle où est introduite pour la première fois, sous le nom de « tout », la notion même de somme d'une série infinie, incluant aussi bien le cas d'une série convergente que d'une série divergente telle que la série harmonique. Si elles accèdent alors au statut d'objet mathématique à part entière, les séries n'ont encore, à cette époque, que très peu d'applications et sont surtout considérées comme un approfondissement mathématique du concept d'infini. Tout change au 17ème siècle avec l'invention « mirifique » des logarithmes et le développement rapide des techniques d'intégration. Sous l'impulsion de Mengoli, Wallis, Newton, Leibniz et Gregory, notamment, les séries connaissent alors un extraordinaire renouveau et deviennent un outil fondamental du calcul infinitésimal. Enfin vient, avec le siècle des Lumières, l'âge d'or des séries caractérisé par une profusion de splendides identités découvertes par le plus grand mathématicien du 18ème siècle, Leonhard Euler. C'est aussi à cette époque que sont mises en œuvre les premières méthodes systématiques de sommation des séries divergentes.

2 La période médiévale

Le Français Nicolas Oresme est considéré comme le premier savant à avoir développé, dans ses *Questions sur la Géométrie d'Euclide* rédigées au milieu du 14ème siècle, une « théorie des séries » incluant une règle permettant de calculer la somme d'une série géométrique ainsi qu'une démonstration de la divergence de la série harmonique.

Etudiant en logique et en théologie au Collège de Navarre[1] à l'Université de Paris, Oresme s'y distingue très vite et en devient grand-maître en 1356. Après avoir enseigné pendant six ans au Collège de Navarre, Oresme entame ensuite une brillante carrière ecclésiastico-politique au service du roi Charles V (le Sage) dont il est successivement le secrétaire, le conseiller et le chapelain, sans cesser de s'intéresser aux questions scientifiques. Entre 1370 et 1376, à la demande du roi, il traduit en français la plus grande partie de l'oeuvre d'Aristote qu'il enrichit de commentaires critiques (gloses) qui révèlent sa propre pensée scientifique. Tant par son style novateur que par son esprit à la fois critique et audacieux, Oresme aura joué un rôle capital dans le passage de la science médiévale à la science moderne.

2.1 La somme d'une série infinie

Dans les *Questions sur la Géométrie d'Euclide*, les séries apparaissent comme une représentation mathématique des notions d'infini par division et d'infini par addition introduites par Aristote dans sa *Physique*. En effet, une série géométrique de raison $\frac{1}{\lambda}$ est construite de telle sorte que, d'une part, chaque nouveau terme est obtenu à partir du terme précédent par division par λ et, d'autre part, chaque nouveau terme vient s'ajouter à la somme des termes précédents. Ces deux opérations combinées étant répétées indéfiniment. L'apport conceptuel d'Oresme est d'avoir introduit sous le nom de « tout » la notion même de *somme d'une série*. Pour Oresme, une série de grandeurs (c'est le seul type qu'il considère) a toujours une somme, tantôt finie, tantôt infinie. Par son degré de généralité, cette conception très novatrice pour l'époque, qui dépasse le point de vue physique d'Aristote, permet d'affirmer qu'Oresme a jeté dans ses *Questions* les premières bases d'une théorie des séries infinies.

Oresme énonce en particulier une règle qui permet de calculer le tout (i.e la somme) de la série géométrique de raison $\frac{1}{\lambda}$ pour un rationnel $\lambda > 1$, règle qui peut se traduire dans le langage moderne par la formule :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} + \cdots = \frac{1}{\lambda - 1}.$$

Cependant, il ne donne aucune démonstration ni même la moindre indication sur la manière dont il a trouvé cette « règle ».

En superposant verticalement des rectangles de base 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc. puis en divisant indéfiniment horizontalement chacun de ses rectangles, Oresme parvient aisément à cal-

1. Institut fondé à Paris par Jeanne de Navarre, épouse du roi Philippe IV (le Bel), petit-fils de saint Louis.

culer la somme[2] :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2\,.$$

D'autres résultats du même type donnés également par Oresme laissent penser qu'il aurait eu connaissance de la formule générale :

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda^3}+\frac{4}{\lambda^4}+\cdots=\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$$

calculant la somme obtenue en effectuant le produit de deux séries géométriques de même raison, bien qu'il ne l'ait jamais explicitée

2.2 La série harmonique

Le résultat le plus remarquable obtenu par Oresme dans ses *Questions* est la démonstration de la nature infinie de la somme de la série harmonique[3]. Rappelons qu'il s'agit du problème de la sommation de la série des inverses des nombres entiers naturels :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

La divergence vers l'infini de cette série est un résultat non trivial et, en apparence, très surprenant au regard de la croissance extrêmement lente de ses sommes partielles : on peut ainsi montrer qu'il faut ajouter plus de 10^{43} termes de la série pour que la somme dépasse (enfin) 100. Cependant, l'intuition d'Oresme n'était pas de nature numérique, mais géométrique.

L'idée d'Oresme consiste à faire apparaître des groupes de 2^n termes consécutifs (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) tous supérieurs à $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})+\cdots\\ =1+\frac{1}{2}+A_1+A_2+\cdots\end{aligned}$$

avec

$$A_1=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\,,$$

$$A_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\,,$$

$$\begin{aligned}A_3&=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\\&>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

2. L'identité $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots=2$ semble avoir été découverte à la même époque par l'Anglais Richard Suiseth dit Le Calculateur, mais sa formulation est particulièrement obscure : voir p. 266 du livre de Boyer cité en référence.

3. Du grec *harmonia* qui signifie « juste rapport ».

De manière générale,

$$A_n = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

est supérieur à 2^n fois $\frac{1}{2^{n+1}}$ c'est à dire à $\frac{1}{2}$. Il en résulte que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} = 1 + \frac{1}{2} + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots .$$

Or, la série de droite contenant une infinité de termes égaux à $\frac{1}{2}$, Oresme en conclut qu'*« il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini »*. On remarquera qu'Oresme a raisonné sur la somme de la série considérée *a priori* avant même de savoir si elle est finie ou infinie.

2.3 Conclusion

A la fin du 14ème siècle, les séries acquièrent progressivement un statut mathématique à part entière mais, ne trouvant encore que très peu d'applications, elles sont surtout considérées comme un approfondissement mathématique des concepts d'infini par division et d'infini par addition.

3 Le renouveau du 17ème siècle

Le 17ème siècle est marqué par un extraordinaire renouveau de l'intérêt pour l'étude des séries en relation avec deux avancées fondamentales : l'introduction des logarithmes[4] par John Neper (*Mirifici Logarithmorum canonis Descriptio*, Edimbourg, 1614) bientôt perfectionnés par Henry Briggs (*Arithmetica logarithmica*, Londres, 1624) d'une part, et le développement du calcul intégral par Cavalieri et Wallis d'autre part. Ces deux directions se rejoignent au milieu du siècle avec l'observation cruciale (faite pour la première fois par Antonio de Sarasa en 1649) que l'aire sous l'hyperbole a les propriétés caractéristiques d'une fonction logarithmique, qu'on appelle à cette époque « logarithme hyperbolique ».

3.1 Le logarithme hyperbolique et la série harmonique

Le prêtre italien Pietro Mengoli (1626-1686) suit l'enseignement de Cavalieri à l'Université de Bologne. Après la mort de son maître en 1648, il lui succède comme professeur de mathématiques. Mengoli commence par retrouver, aux alentours de 1650, le résultat d'Oresme sur la divergence de la série harmonique en observant que :

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$$

4. Du grec *logos* (raison) et *arithmos* (nombres), littéralement les logarithmes sont des « nombres de raisons ».

puis, en regroupant les termes de la série harmonique trois par trois, il obtient alors la majoration :

$$1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10})+\cdots > 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots = 1+1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\text{ etc.}$$

qui montre que la somme de la série ne peut être finie.

Au cours de ses propres recherches sur le logarithme, Mengoli est surtout le premier mathématicien à avoir calculé, en 1659, la somme de la série harmonique *alternée* :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

Pour cela, Mengoli remarque que :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n} = (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

puis il montre que, lorsque n devient infiniment grand, la quantité $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ devient infiniment proche de $\log(2n)-\log(n) = \log 2$. Ce remarquable résultat sera plusieurs fois retrouvé au cours de la décennie suivante, notamment par Brouncker et Newton.

Mengoli remarque également que :

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

d'où il déduit l'inégalité portant sur les séries :

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{5.5}+\cdots < \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = 1$$

qui montre que la série des inverses des carrés parfaits a pour somme un nombre inférieur à 2, mais Mengoli échoue à calculer la valeur *exacte* de cette somme, célèbre problème qui ne sera résolu que 80 ans plus tard par Euler[5].

3.2 Le produit infini de Wallis

A l'issue de la seconde Guerre Civile anglaise où il s'était notamment distingué par son aptitude à déchiffrer les codes secrets des Royalistes, John Wallis (1616-1703) est nommé en 1649 professeur de Géométrie à l'Université d'Oxford (Savilian Chair) sur recommandation de Cromwell, poste qu'il occupera pendant 53 ans. En 1655-56, Wallis publie un important mémoire intitulé *Arithmetica infinitorum* (l'Arithmétique de l'infini) qui est considéré comme le premier traité d'analyse de l'histoire (c'est notamment dans cet ouvrage qu'on trouve pour la première fois le symbole ∞ pour désigner l'infini).

Wallis étend la formule $\int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$ que Cavalieri avait établie pour a entier à tout rationnel $a = \frac{n}{m}$ et interpole la quantité $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ qui représente la « quadrature du

5. Voir la section suivante.

cercle » (aire d'un cercle de diamètre 1) par les valeurs des quantités $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{m}})^n dx$ pour n et m entiers (qu'il sait calculer). A l'issue de « *one of the more audacious investigations by analogy and intuition that has ever yielded a correct result*[6] », Wallis aboutit alors au célèbre produit infini :

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \times \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \times \cdots$$

qui peut encore s'écrire[7] :

$$\frac{\pi}{4} = (1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{5^2})(1 - \frac{1}{7^2}) \cdots$$

Les techniques d'intégration « par interpolation » employées par Wallis dans son *Arithmetica infinitorum* tomberont assez rapidement en désuétude, cependant elles auront une profonde influence sur les mathématiciens anglais de la génération suivante, tout particulièrement sur le jeune Isaac Newton qu'elles conduiront notamment à la découverte de la célèbre série du binôme (cf. [8]).

3.3 La série du binôme de Newton

Issac Newton (1642-1727) entre au Trinity College de Cambridge[8] en 1661. Il étudie de manière approfondie les ouvrages de Schooten, Viète, Descartes et Wallis. A partir de 1665, alors qu'il est encore étudiant, il introduit des idées particulièrement fécondes qui font jouer un rôle central aux séries infinies : « *In the winter between the years 1664 and 1665 upon reading Dr. Wallis Arithmetica Infinitorum and trying to interpole his progressions for squaring the circle, I found out first an infinite series for squaring the circle and then another infinite for squaring the Hyperbola* ».

La méthode de Newton exposée dans *De methodis serierum et fluxionum* (Sur la Méthode des séries infinies et des fluxions) rédigé durant l'hiver 1670-1671, consiste à développer l'expression à intégrer en série de puissances puis à intégrer chacun des termes en appliquant la règle $x^{\frac{m}{n}} \to \frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ qu'il tire de sa lecture de l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis mais applique à une abscisse quelconque. C'est en cherchant à exprimer l'aire $I_m(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt$ à l'aide d'une série infinie qu'il découvre la fameuse *formule du binôme* qui porte désormais son nom :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6} x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24} x^4 + \cdots .$$

En développant $(1-x^2)^a$ pour $a = \frac{1}{2}$ par la formule précédente, et en utilisant l'identité :

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{1.2\ldots n} = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5.\ldots.(2n-3)}{2.4.6.\ldots.2n},$$

6. Selon la formule de C. Edwards : voir p. 171 du livre d'Edwards cité en référence.

7. Ce produit de Wallis est un cas particulier d'une remarquable formule découverte près d'un siècle plus tard par Euler : le produit infini de la fonction sinus (voir la section suivante).

8. Le Trinity College (collège de la sainte Trinité) était le plus important des collèges de Cambridge, fondé en 1546 par le roi Henry VIII.

Newton obtient alors un développement en série de l'intégrale de Wallis :

$$I_1(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \cdots$$

On trouve dans les pages de *De methodis serierum et fluxionum* plusieurs exemples importants d'application des séries au calcul numérique : Newton expose notamment une méthode de calcul de π basée sur le développement en série de l'intégrale $\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}dx$ grâce à la formule du binôme précédemment découverte. Plus précisément, Newton obtient l'identité :

$$\int_0^x (t-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \cdots$$

qu'il applique pour $x = \frac{1}{4}$. Il en déduit :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} (x-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{2}{3}\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\frac{1}{2^7} - \frac{1}{72}\frac{1}{2^9} - \frac{5}{704}\frac{1}{2^{11}} - \cdots$$

et la convergence très rapide de cette série lui permet de donner une valeur numérique de π avec 16 décimales exactes.

3.4 La série du logarithme

La relation entre le logarithme hyperbolique et le logarithme usuel de Briggs est élucidée à la fin des années 1660. Dans *De Methodis Serierum et fluxionum*, Newton explique clairement comment déduire le logarithme décimal d'un nombre du calcul de son logarithme hyperbolique en multipliant ce dernier par 0.4342944819032518 qui est l'inverse de $\log 10$.

Dans ce même article, Newton évalue les aires hyperboliques à l'aide de la série du binôme dans le cas $a = -1$. Il trouve de cette façon :

$$\log(1+x) = \int_0^x (1+u)^{-1} du = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

et

$$-\log(1-x) = \int_0^x (1-u)^{-1} du = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

ce qui lui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\log(1+x) - \log(1-x) =& 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \cdots \\ \log(1+x) + \log(1-x) =& x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \cdots\end{aligned}$$

En prenant $x = 0.1$ et $x = 0.2$, Newton calcule alors (par demi-somme et demi-différence) $\log(1.1), \log(0.9), \log(1.2), \log(0.8)$ ce qui lui permet en particulier d'évaluer $\log 2$, $\log 3$ et $\log 5$ avec 16 décimales exactes grâce aux relations

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 2\log(1.2) - \log(0.8) - \log(0.9)\,, \\
\log 3 &= \log 2 + \log(1.2) - \log(0.8)\,, \\
\log 5 &= 2\log 2 - \log(0.8)\,.
\end{aligned}$$

3.5 La série de Leibniz-Gregory

Avant d'être nommé professeur de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Saint Andrews, l'Ecossais James Gregory (1638-1675) avait effectué un long séjour en Italie pendant lequel il s'était notamment familiarisé avec les méthodes d'intégration de Cavalieri et où il avait rencontré Mengoli. Gregory était un grand admirateur de Newton avec qui il correspondait régulierement.

Dans une lettre à John Collins, il est le premier à écrire, en 1671, la célèbre série de l'arctangente :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

dont la valeur en $x = 1$ donne la fameuse série alternée de Leibniz pour π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Dans une lettre à Leibniz datant de 1676, Newton indique lui-même (sans démonstration) une identité analogue :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

dont on peut supposer qu'il l'a obtenue en intégrant terme à terme entre 0 et 1 le développement :

$$\begin{aligned}
\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \\
= (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots) + (x^2 - x^6 + x^{10} - x^{14} + \cdots)\,.
\end{aligned}$$

Ce résultat sera retrouvé et généralisé au siècle suivant par Euler qui montrera notamment que

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

et

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

3.6 Conclusion

A la fin du 17ème siècle, les séries ne sont plus considérées comme de simples curiosités mathématiques mais sont devenues sous l'impulsion de Newton, Gregory et Leibniz un outil fondamental du calcul infinitésimal. La voie est désormais ouverte pour le flot de développements en séries qui déferlera au siècle suivant.

4 L'Age d'or des séries

Le 18ème siècle peut être considéré comme le véritable âge d'or des séries infinies en raison du rôle exceptionnel qu'elles jouent dans les travaux du plus grand mathématicien de ce siècle, Léonhard Euler (1707-1783).

Dans sa jeunesse, Euler a bénéficié de l'enseignement de Johann Bernoulli, célèbre mathématicien de son temps qui décèle très tôt chez son élève de prodigieuses capacités de mémorisation. En 1727, il rejoint Daniel Bernoulli (un des trois fils de Johann) à l'Académie de St Petersbourg, un centre de recherche très important fondé deux ans plus tôt par Catherine I, où il reste 14 ans et publie une centaine d'articles. A partir de 1735, avec la résolution du fameux problème de Bâle, la renommée scientifique d'Euler est bien établie dans toute l'Europe et, après la mort de Johann Bernoulli en 1748, il est unanimement considéré par ses pairs comme le plus grand mathématicien vivant. En 1741, à la suite de troubles politiques en Russie, Euler quitte St Petersbourg pour Berlin et intègre l'Académie des sciences de Prusse où il passe 25 ans. N'ayant pu obtenir la présidence de l'Académie qu'il convoitait, il retourne à St Petersbourg en 1766, à la demande de Catherine II[9], désireuse de restaurer le prestige de l'Académie de Russie.

Les 82 articles d'Euler spécifiquement consacrés aux séries infinies occupent 3 volumes de ses oeuvres complètes *Opera Omnia* regroupés sous le titre *Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes*, et nombre d'entre-eux comptent parmi les plus célèbres.

Les développements en séries infinies et produits infinis occupent également une place centrale dans le premier volume de sa remarquable *Introductio in analysin infinitorum* (Introduction à l'analyse infinitésimale) publiée en 1748. Ce chef d'oeuvre de clarté qui ouvre une nouvelle ère de l'analyse est unanimement considéré comme le premier grand traité d'analyse (presque) moderne et il restera une référence incontournable pendant près de 100 ans. Selon le grand historien russe A. P. Yushkevich, l'*Introductio* aura joué pour l'analyse un rôle comparable à celui des *Elements* d'Euclide pour la géométrie.

Parallèlement, Euler a entretenu une correspondance stimulante et fructueuese avec de grands mathématiciens de son temps, notamment avec Christian Goldbach (196 lettres échangées de 1729 à 1764 dont un grand nombre portent sur les séries infinies).

9. Amie de Diderot, Voltaire et D'Alembert, protectrice des sciences, des arts et des lettres, la tsarine Catherine II a gouverné en « despote éclairée ». Sous son règne, la Russie devint une très grande puissance européenne.

4.1 La série de l'exponentielle

Dans le chapitre VII de l'*Introductio* (*De quantitatum exponentialum ac logarithmorum per series explicatione*), Euler déduit la série de l'exponentielle a^z de l'identité

$$a^z = (1 + \frac{kz}{\iota})^\iota \quad \text{avec } \iota \text{ infiniment grand,}$$

où a et k sont liés par une certaine relation fonctionnelle qu'il précise ultérieurement (on a $k = \log a$). Le développement de l'identitité précédente par la série du binôme de Newton

$$(1 + \frac{kz}{\iota})^\iota = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(\iota-1)}{1.2\iota}k^2z^2 + \frac{1(\iota-1)(\iota-2)}{1.2\iota.3\iota}k^3z^3 + \cdots$$

et une "simplification" résultant du fait que ι est un nombre infiniment grand lui permet d'écrire

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

Le choix de $k = 1$ correspond alors à la base

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

qu'Euler note déjà e dans une lettre à Goldbach de novembre 1731, notation qui sera universellement adoptée.

4.2 La résolution du problème de Bâle

La résolution en 1735 du fameux *problème de Bâle*, c'est à dire la détermination de la somme de la série des inverses des carrés parfaits, universellement notée $\zeta(2)$, est le premier grand triomphe d'Euler (alors âgé de 28 ans) qui le rend célèbre dans l'Europe entière, notamment en raison de l'élégance et de l'apparente simplicité du résultat. Ce problème avait été initialement posé par Mengoli au milieu du 17ème siècle, et les frères Jakob et Johann Bernoulli avaient déployé pendant des décennies une énergie considérable pour le résoudre, mais sans obtenir de succès décisif.

Dès 1731, Euler avait découvert une brillante transformation de cette série qui permet d'en accélérer la convergence :

$$\zeta(2) = (\log 2)^2 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{16.16} + \frac{1}{32.25} + \cdots)$$

C'est à cette occasion qu'il introduit pour la première fois la célèbre fonction dilogarithme :

$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x \frac{-\log(1-t)}{t}\,dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots$$

qui vérifie $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2)$ et l'équation fonctionnelle : $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = -\log x \log(1-x) + \zeta(2)$. En utilisant le développement : $\log 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \cdots$, Euler trouve alors la valeur approchée :

$$\zeta(2) = 1,644934\cdots$$

La méthode d'Euler pour déterminer la valeur *exacte* de $\zeta(2)$ exposée dans son article originel de 1735 *De summis serierum reciprocarum* repose sur la remarque suivante : si $P(x)$ est un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 1$ et dont les racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, alors il admet la factorisation :

$$P(x) = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^n x^n = (1 - \frac{x}{\alpha_1})(1 - \frac{x}{\alpha_2}) \cdots (1 - \frac{x}{\alpha_n})$$

d'où il est très facile de déduire, par identification des coefficients, la relation :

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} = a_1 .$$

Euler applique alors très audacieusement cette relation à « *l'équation algébrique de degré infini* »

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{120} - \frac{z^3}{5040} + \cdots = 0$$

avec $z = x^2$, dont les « racines » sont précisément $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \cdots$. D'où il déduit

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

ce qui conduit à la célébrissime identité :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} .$$

Bien que non-rigoureuse (même pour les critères de l'époque), la « démonstration » algébrique d'Euler est en fait justifiée par l'existence d'une factorisation de la fonction sinus en produit infini qu'il n'établira (presque) rigoureusement qu'en 1742 :

$$\frac{\sin x}{x} = (1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{3\pi})(1+\frac{x}{3\pi}) \cdots = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2}) \cdots$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, ce produit s'écrit :

$$\frac{2}{\pi} = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{36})(1 - \frac{1}{64}) \cdots$$

ce qui permet de retrouver la formule de Wallis.

4.3 L'extension des formules de Newton aux produits infinis

Au début du chapitre X de son *Introductio*, Euler considère plus généralement une factorisation de la forme :

$$1 - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + A_4 z^4 - \cdots = (1 - \frac{z}{\alpha_1})(1 - \frac{z}{\alpha_2})(1 - \frac{z}{\alpha_3})(1 - \frac{z}{\alpha_4}) \cdots$$

et, posant $S_p = \frac{1}{\alpha_1^p} + \frac{1}{\alpha_2^p} + \frac{1}{\alpha_3^p} + \frac{1}{\alpha_4^p} + \cdots$, il établit alors les relations algébriques suivantes qui étendent aux produits infinis les formules de Newton déjà connues pour les polynômes.

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1\,, \\ S_2 &= A_1 S_1 - 2A_2\,, \\ &\cdots \\ S_p &= A_1 S_{p-1} - A_2 S_{p-2} + A_3 S_{p-3} - A_4 S_{p-4} + \cdots + (-1)^{p-1} p A_p\,. \end{aligned}$$

Appliquant alors ces formules de Newton généralisées à l'identité :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2 z}{6} + \frac{\pi^4 z^2}{120} - \frac{\pi^6 z^3}{5040} + \cdots = (1-z)(1-\frac{z}{4})(1-\frac{z}{9})(1-\frac{z}{16})(1-\frac{z}{25})\cdots$$

avec $z = x^2$, Euler calcule alors de proche en proche les sommes :

$$\zeta(2p) = 1 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{16^p} + \frac{1}{25^p} + \cdots$$

De cette manière, il obtient ainsi :

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,; \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,; \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}\,; \cdots ; \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{6825 \times 93555}\,.$$

Dès ses premiers calculs de 1734-35, il n'avait pas échappé à Euler que la somme $\zeta(2p)$ s'exprimait comme le produit de π^{2p} par un nombre rationnel. Cependant ce n'est que vingt années plus tard, en 1755, qu'en dérivant logarithmiquement le produit infini de la fonction sinus, il établira la célébrissime relation :

$$\zeta(2p) = \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}|B_{2p}|$$

qui relie les sommes $\zeta(2p)$ aux *nombres de Bernoulli*[10] B_{2p}.

En utilisant des idées analogues, Euler déterminera également les valeurs exactes des sommes des séries *alternées* :

$$L(2p+1) = 1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \text{etc.}$$

qui généralisent la série de Leibniz-Gregory :

$$L(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

10. Cette fameuse suite de nombres aux propriétés remarquables apparue pour la première fois dans l'*Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli ne figure pas explicitement dans l'*Introductio* d'Euler. C'est sur une suggestion de De Moivre, qu'Euler les nommera ainsi.

Euler montre en particulier que :

$$L(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}\,,$$

$$L(5) = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}\,.$$

De manière générale, Euler établit que $L(2p+1)$ est le produit de de π^{2p+1} par un nombre rationnel. Cependant, il échoua à trouver une formule analogue pour la somme $\zeta(2p+1)$, conjecturant dans son article *De seriebus quibusdam considerationes* que $\zeta(2p+1)$ pouvait s'écrire $K\pi^{2p+1}$ où K est une certaine fonction de $\log 2$.

4.4 La constante de la série harmonique

Euler a précisé la relation entre la série harmonique et le logarithme naturel (hyperbolique), déjà remarquée au siècle précédent par Mengoli, en donnant pour la première fois, dans une lettre à Johann Bernoulli datée de 1740, le développement asymptotique du n-ième nombre harmonique[11] :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + C + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \cdots$$

où $C = 0,5772\cdots$ est la célèbre *constante d'Euler* qu'Euler exprime sous forme d'une série *divergente* :

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \frac{B_6}{6} + \cdots$$

avec $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, etc., en précisant qu'on doit continuer la sommation jusqu'à ce que les termes de cette série alternée commencent à diverger[12].

4.5 Les sommes d'Euler-Goldbach

A partir d'une série d'échanges épistolaires avec Goldbach datant de l'hiver 1742-1743, Euler entreprend l'étude systématique des séries de la forme :

$$\zeta^\star(m,n) = 1 + \frac{1}{2^m}(1 + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{3^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \frac{1}{4^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}) + \cdots$$

qu'on appelle désormais *Sommes d'Euler*. Dans son article de 1775, *Meditationes circa singulare serierum genus*, on trouve notamment les remarquables relations :

$$\zeta^\star(2,1) = 2\zeta(3) \quad \text{et} \quad \zeta^\star(3,1) = \frac{1}{2}(\zeta(2))^2 = \frac{\pi^4}{72}\,,$$

11. Ce développement est en fait un cas particulier de la célèbre *formule d'Euler-MacLaurin* qu'Euler avait établie en 1734.

12. C'est ce qu'on appellera au 19ème siècle la « sommation au plus petit terme ». La constante d'Euler est la somme de la série $\sum \frac{B_n}{n}$ au sens de Borel et la somme de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ au sens de Ramanujan (voir le livre de Hardy cité en référence).

qui sont deux cas particuliers d'une formule générale appelée *formule d'Euler* :

$$2\zeta^\star(m,1) = (m+2)\zeta(m+1) - \sum_{j=1}^{m-2} \zeta(m-j)\zeta(j+1)\,.$$

4.6 Les implications arithmétiques de la divergence de la série harmonique

Dans son article de 1737 *Variae observationes circa series infinitas* (Diverses observations sur les séries infinies), Euler est le premier mathématicien à avoir compris les profondes implications arithmétiques de la divergence de la série harmonique[13]. Il établit en effet une connexion avec la série des nombres premiers au travers de l'identité :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{2.3.5.7.11\cdots}{(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)(11-1)\cdots}$$

En inversant cette relation, Euler en conclut que :

$$0 = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers. Ceci implique notamment la divergence vers l'infini de la série des inverses des nombres premiers ce qui constitue un raffinement du théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers. Les travaux d'Euler dans cette direction très prometteuse seront poursuivis au 19ème siècle par Dirichlet et Riemann, donnant naissance à la théorie analytique des nombres.

4.7 Les premières méthodes de sommation des séries divergentes

Dans son article de 1760, *De seriebus divergentibus*, Euler est aussi le premier mathématicien à avoir mis sérieusement en œuvre une théorie systématique d'étude des séries divergentes. Bien que d'usage fréquent à l'époque, ce type d'objet est encore très mal maîtrisé, donnant lieu à des résultats contradictoires, sources de nombreuses confusions et controverses[14]. Les méthodes de sommation élaborées par Euler vont grandement contribuer à éclaircir la question[15]. L'idée de base d'Euler consiste à identifier la fonction génératrice de la série, puis d'en prendre la valeur (ou la limite) en 1 lorsque c'est possible. C'est de cette manière qu'il justifie l'attribution (déjà proposée par Leibniz) de la valeur $\frac{1}{2}$ à la somme : $1-1+1-1+1-1+\cdots$ en raison du développement géométrique :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

13. Riemann rend hommage à Euler dans l'introduction de son fameux article de 1859 sur les nombres premiers.

14. Voir notamment la célèbre controverse entre Leibniz et Johann Bernoulli sur le logarithme des nombres négatifs et imaginaires qui fut résolue par Euler.

15. Cependant, Euler semble avoir cru, à tort, qu'il était possible d'assigner de façon *univoque* une somme à n'importe quelle série divergente.

Sa célèbre étude de la série hypergéométrique de Wallis (qualifiée par Euler de *série divergente par excellence*) :

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots$$

où il introduit, et résout, l'équation différentielle formellement vérifiée par la fonction génératrice :

$$\varphi(x) = x - 1!x^2 + 2!x^3 - 3!x^4 + 4!x^5 - 5!x^6 + \cdots$$

anticipe déjà sur les travaux d'Emile Borel au début du 20ème siècle (cf. [10]).

4.8 Conclusion

La profusion de splendides identités faisant intervenir les séries est un trait remarquable des mathématiques du 18ème siècle. Après ce feu d'artifice, les mathématiciens du 19ème siècle (Weirstrass notamment) introduiront des outils d'analyse plus sophistiqués tels que la *convergence normale* des séries de fonctions qui permettent de justifier rigoureusement les merveilleux calculs d'Euler.

Références

[1] C. Boyer, U. Merzbach, *A History of Mathematics*, 2ème édition révisée, John Wiley & Sons, 1991.

[2] J. Dutka, Wallis product, Brouncker's continued fraction, and Leibniz's series, *Archiv for History of exact sciences*, vol. 26 (1982), 115-126

[3] C.H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, 1994.

[4] L. Euler, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, tome I, Opera Omnia I-8.

[5] L. Euler, *Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes*, Opera Omnia I-14 à I-16.

[6] G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press, 1973.

[7] E. Mazet, La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne, *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 9 (2003), 33-80.

[8] I. Newton, *Annotations from Wallis*. The Mathematical Papers of Isaac Newton, volume I, édité par D. T. Whiteside. Cambridge University Press, 1967.

[9] I. Newton, *De Methodis Serierum et fluxionum* (A treatise of the method of series and fluxions). The Mathematical Papers of Isaac Newton, volume III, édité par D. T. Whiteside. Cambridge University Press, 1969.

[10] V. S. Varadarajan, *Euler through time. A new look at old themes*, American Mathematical Society, 2006.

[11] V. S. Varadarajan, Euler and his work on infinite series, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44** (2007), 515-539.

[12] D. T. Whiteside, Newton's discovery of the general binomial theorem, *Mathematical Gazette*, **45** (1961), 175-80.